# Théorie des graphes

*L3 TECHNOLOGIES DE L'INFORMATION*

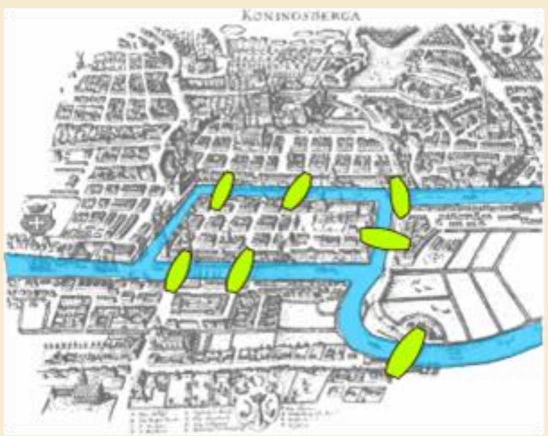
*DR ABDALLAH EL KHYARI*
*ABDALLAH.ELKHYARI@GMAIL.COM*

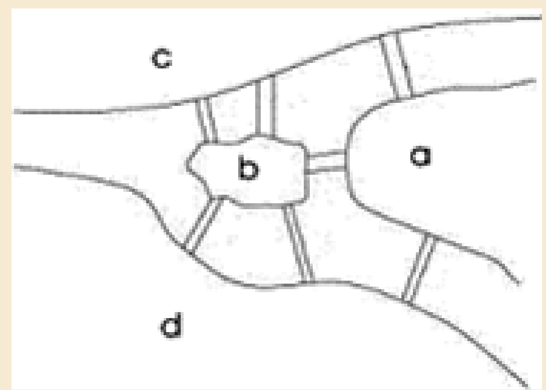
# THEORIE DES GRAPHES

# Origine des graphes

## Le problème des sept ponts 1/3

- La ville de Königsberg est construite autour de deux îles
- Ces iles sont reliées entre elles par un pont.
- Six autres ponts relient les rives de la rivière à l'une ou l'autre des deux îles



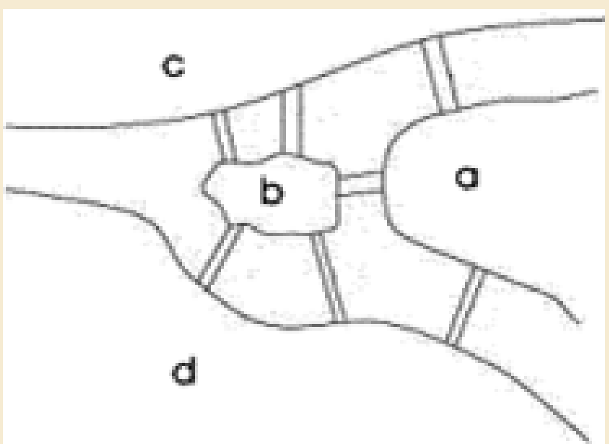


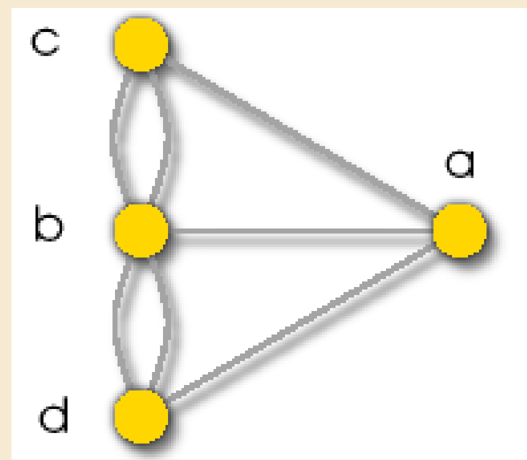

- Le problème était le suivant : Peut on se promener en passant une fois et une seule fois par tous les ponts ?

# Origine des graphes

## Le problème des sept ponts 2/3

- Le problème des ponts de Königsberg se modélise par un graphe



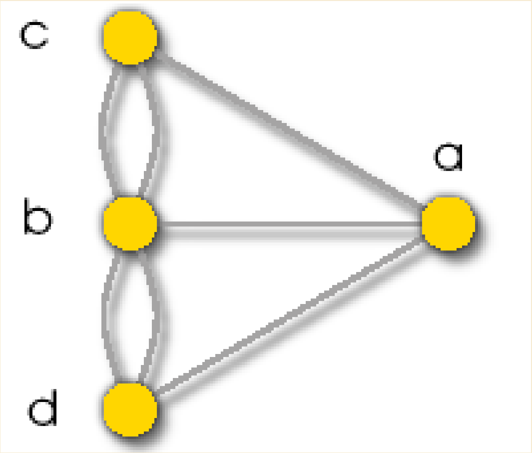




- Le problème revient à chercher un cycle eulérien : chaîne passant par toutes les arêtes du graphe une et une seule fois, et revenant à son point de départ.

# Origine des graphes

## Le problème des sept ponts 3/3

- Léonhard Euler a prouvé que le problème est insoluble
- Léonhard Euler (1736) a démontré que pour qu'un graphe admet un cycle Eulérien, il faut que le graphe soit connexe et ne possède aucun sommet de degré impair

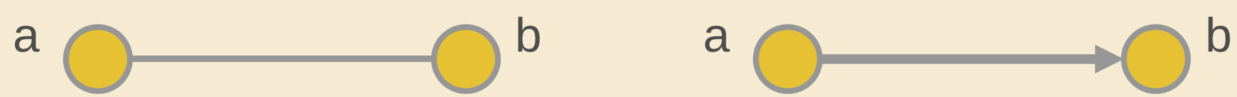


# Introduction



## Introduction

- Les graphes capturent principalement la notion de relations binaires



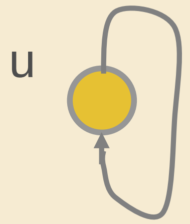

- R(u,v) est vraie
- Une relation peut dans la vie courante lier des objets divers :
  - Ali connaît Adam ---- graphe non orienté
  - Samira est plus grande que Amina ---- graphe orienté
  - E1 est client de E2 ---- graphe orienté
  - Il y a une route entre telle et telle ville ---- graphe non orienté

# Graphes orientés

**Définition**

- Un graphe orienté G est composé :
  - V ensemble de sommets
  - A ensemble des arcs
- $A \subseteq \{(u,v): u,v \in V\}$
- $(u,v) \neq (v,u)$ : relations non symétriques


Un arc de u vers v

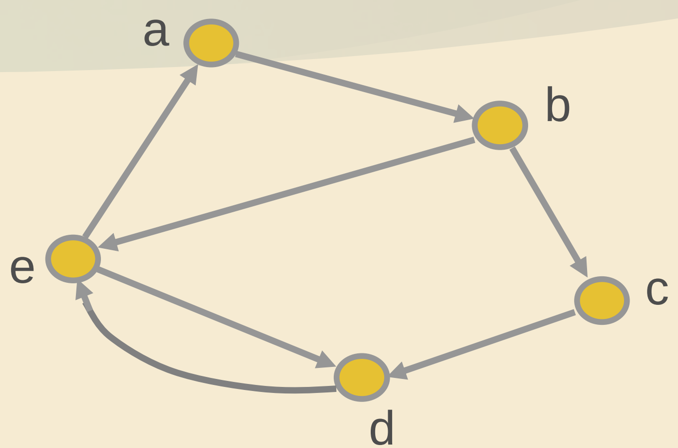



Une boucle

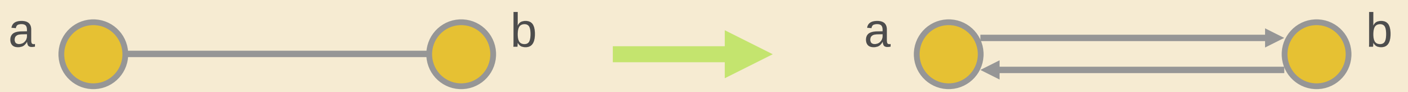
# Graphes orientés

## Exemple

- V=(a,b,c,d,e)
- A={(a,b),(b,c),(b,e),
- (c,d),(d,e),(e,d),(e,a)}




- **Remarque** : Un arc non orienté peut toujours être transformé en une situation où l'on n'a que des arcs orientés.




## Exercice 1

- Construire un graphe orienté dont les sommets sont les entiers compris entre 1 et 12 et dont les arcs représentent la relation « être diviseur de »

# Graphes orientés



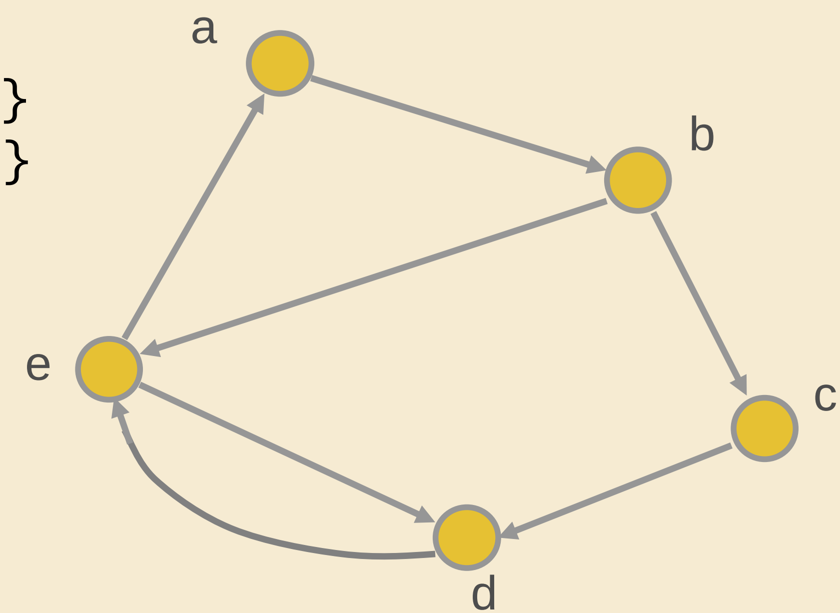
**Définitions**

- Soit u un sommet de $G=(V, A)$
  - $N^+(u)=\{v: (u,v) \in A\}$ : voisins sortants de u
  - $N^-(u)=\{v: (v,u) \in A\}$ : voisins entrants de u
  - Le demi-degré extérieur d'un sommet est le nombre d'arcs adjacents qui en partent. On le note $d^+(u)$
    - $d^+(u) = |N^+(u)|$ : v est un successeur de u
  - Le demi-degré intérieur d'un sommet est le nombre d'arcs adjacents qui y arrivent. On le note $d^-(u)$
    - $d^- (u) = |N^-(u)|$ : v est un prédécesseur de u
  - Le degré d'un sommet est le nombre d'arcs qui lui sont adjacents. On le note $d(u)$
    - $d(u) = d^+(u) + d^-(u)$.

# Graphes orientés

**Exemple**

- $N^+(e)=\{v: (e,v) \in A\} =\{a,d\}$
- $N^-(e)=\{v: (v,e) \in A\} = \{b,d\}$
- $d^+(e) = 2$
- $d^-(e) = 2$
- $d(e) = 4$

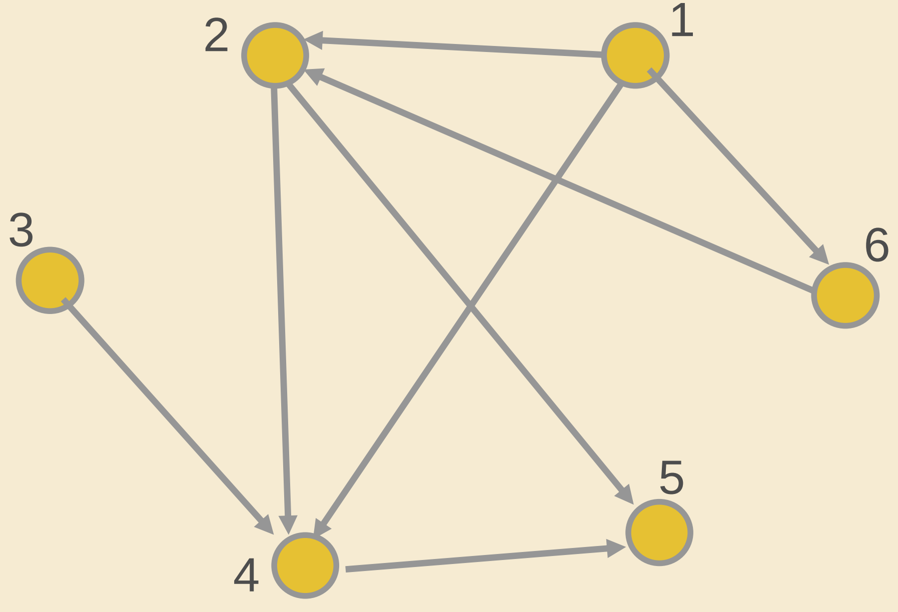


# Graphes orientés



**Exercice 2**

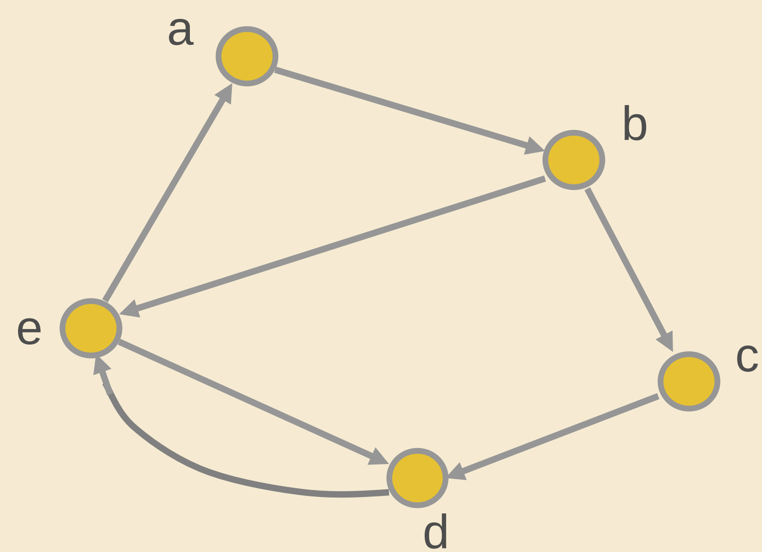
- Trouvez les degrés extérieurs et intérieurs de chacun des sommets du graphe ci-dessous



# Graphes orientés

## Chemin dans un graphe

- Soient u et v deux sommets distincts d'un graphe G=(V,A)
  - Un chemin de u à v dans G est une suite $u_0=u, u_1, \ldots, u_k=v$ de sommets 2 à 2 distincts tq $\forall i \in \{1,\ldots,k\}$ $(u_{i-1}, u_i) \in A$
  - u est l'origine du chemin / v est l'extrémité du chemin
  - La longueur d'un chemin est le nombre d'arcs qu'il possède



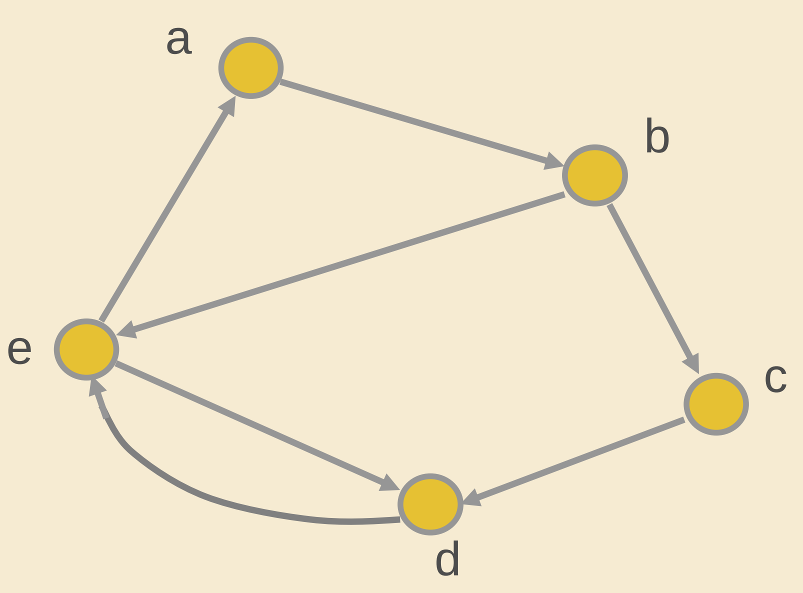

- Un chemin de longueur 4 dans
- le graphe reliant les
- sommets a à e

- ch=( a,b,c,d,e )

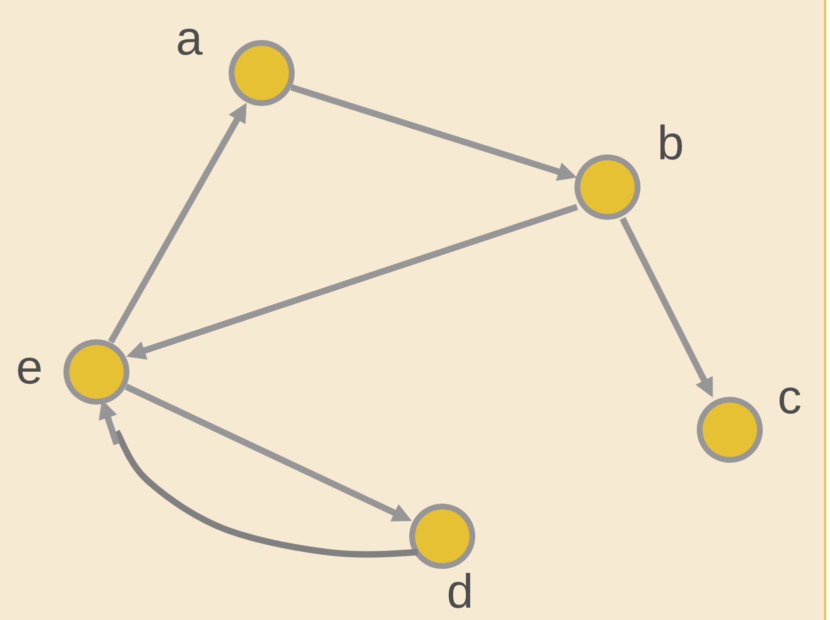
# Graphes orientés

## Graphe fortement connexe

- Un graphe orienté est fortement connexe si pour tout couple (u,v) de sommets distincts, il existe un chemin de u à v et un chemin de v à u




*Graphe fortement connexe*

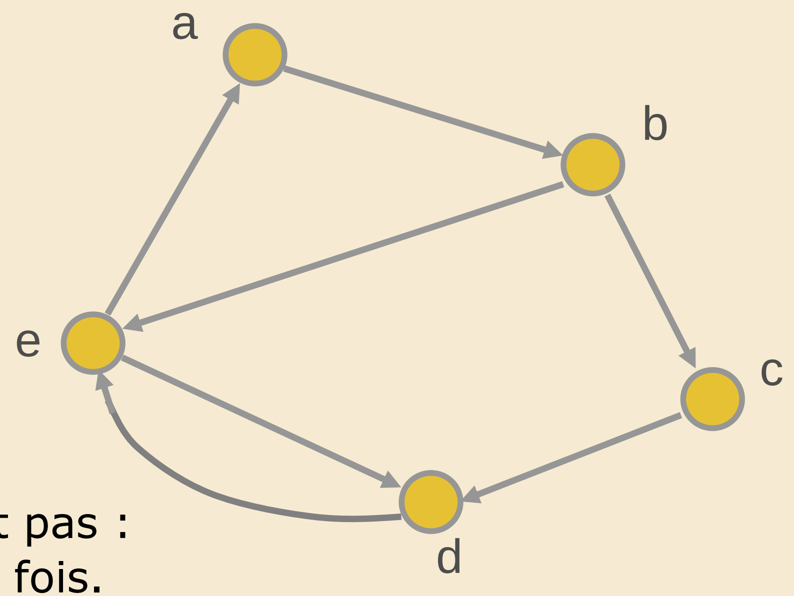



*Graphe non fortement connexe*

# Graphes orientés

## Chemin simple et circuit

- Une chemin est simple si chaque arc du chemin est empruntée une seule fois
- Un circuit est un chemin dont l'origine et l'extrémité sont confondues




- Les chemins (a,b,c,d) et
- (a,b,c,d,e,d) sont simples.
- Le chemin (a,b,c,d,e,d,e,d) ne l'est pas :
- le circuit (d,e,d,e ) est emprunté 2 fois.
- Ce circuit pouvant être emprunté autant de fois que l'on veut, il y a un nombre infini de chemins de a à d

# Graphes orientés



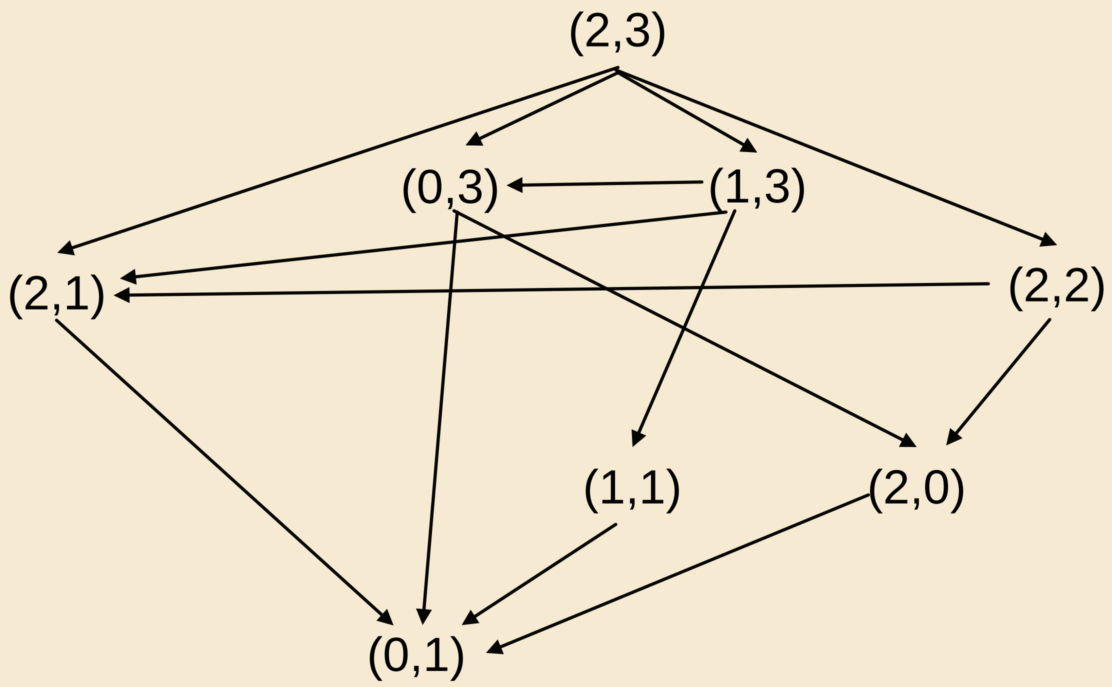
**Exercice 3 : Jeu de Fan Tan**

- Deux joueurs disposent de plusieurs tas d'allumettes. A tour de rôle, chaque joueur peut enlever un certain nombre d'allumettes de l'un des tas (selon la règle choisie). Le joueur qui retire la dernière allumette perd la partie.

- Modélisez ce jeu à l'aide d'un graphe dans le cas où l'on dispose au départ de deux tas contenant respectivement deux et trois allumettes, et où un joueur peut enlever une ou deux allumettes à chaque fois. Que doit jouer le premier joueur pour gagner la partie à coup sûr ?

# Graphes orientés

## Solution exercice 3 : Jeu de Fan Tan



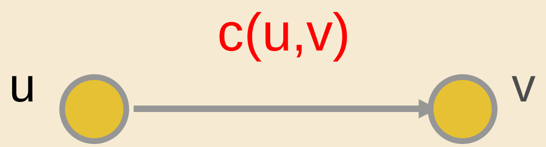

- Nous cherchons un chemin de longueur impaire
- Chemins gagnants : (2,3)-(1,3)-(X,Y)-(0,1) et (2,3)-(2,2)-(X,Y)-(0,1)

# Graphes orientés valués

**Définition**

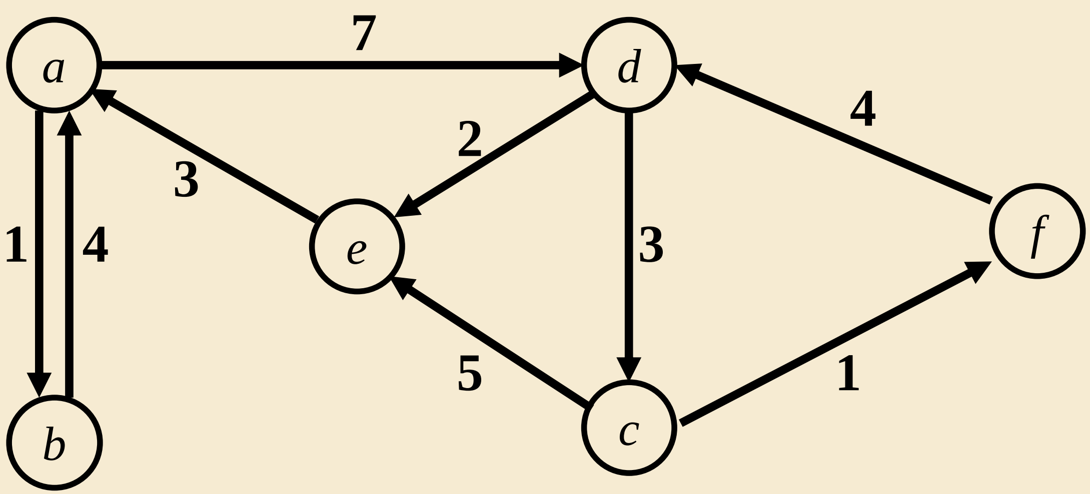
- Un graphe orienté valué *G* est défini par :
  - Un ensemble de *sommets* V
  - Un ensemble d'*arcs* A
  - Une valuation *C* : A $\rightarrow$ R qui à chaque arc du graphe associe une valeur réelle (coûts, poids, distances, …).

- On utilise alors la notation : *G* = (*V* , A, *C*)



# Graphes orientés valués

**Exemple**

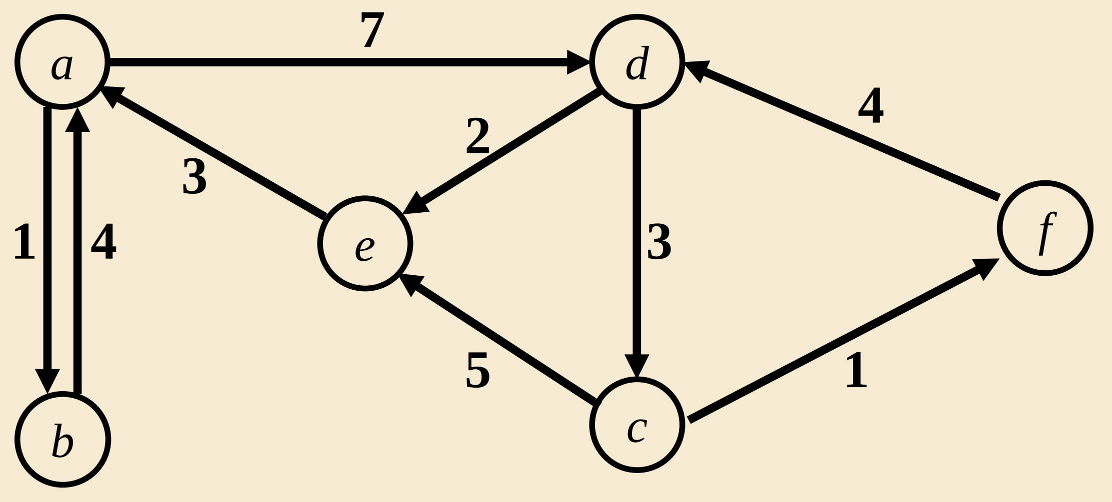



- $V$ = {a, b, c, d, e, f}
- A = {(a,b),(a,d),(b,a),(c,e),(c,f),(d,c),(d,e),(e,a),(f,d)}
- c(a,b) = 1, c(b,a)= 4, c(d,e) = 2, c(a,d) = 7 …

# Graphes orientés valués

## Chemin dans un graphe valué

- le poids (ou longueur) *c(p)* d'un chemin *p* est la somme des poids des arêtes le long du chemin : $c(p) = \sum_{a \in p} c(a)$

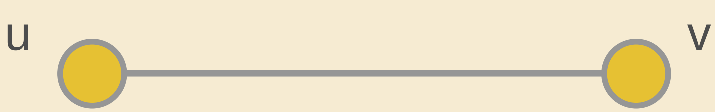



- Le chemin p = (a, d, c, f) est de poids 11
- Le chemin p’ = (a, d, e, a, d, c, f) est de poids 23

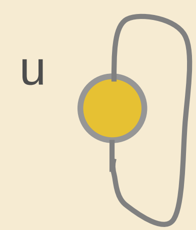
# Graphes non orientés

**Définition**

- Un graphe non orienté G est composé :
  - V ensemble de sommets (ou nœuds)
  - E ensemble des arêtes
- $E \subseteq \{(u, v) : u, v \in V\}$
- $(u, v) = (v, u)$ : relations symétriques




Une arête de u vers v



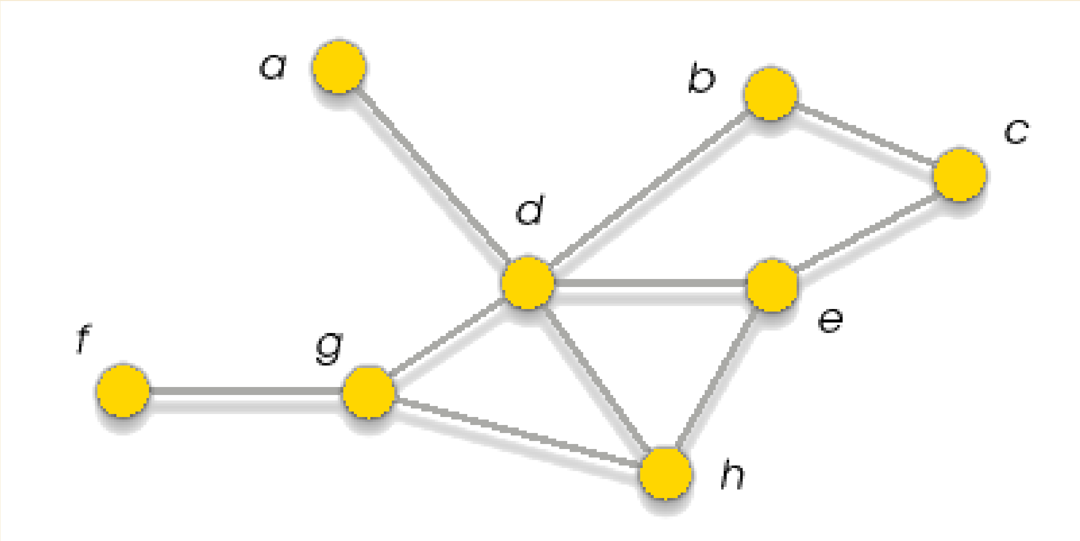

Une boucle

# Graphes non orientés



**Exemple**

- Un graphe à 8 sommets, nommés *a* à *h*, comportant 10 arêtes.
- V={ a, b, c, d, e, f, g, h }
- E={(a,d),(b,c),(b,d),(d,e),(e,c),(e,h),(h,d),(f,g),(d,g),(g,h)}
- | V |=8 et | E |=10

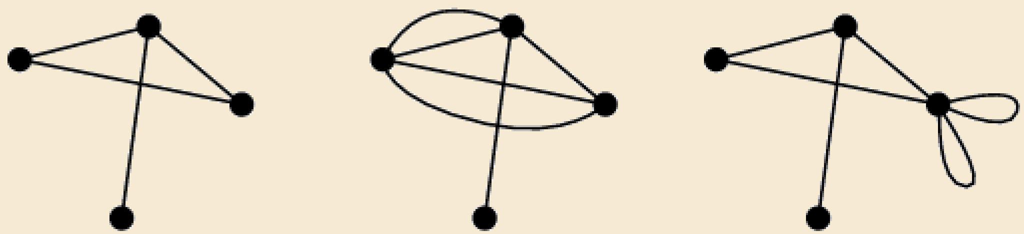


# Graphes simples



## Graphes simples

- Un graphe est dit simple s'il n'a pas de liens doubles ni de boucles.
- Graphes non orientés : graphe sans boucle, et chaque couple de sommets est relié par au plus une arête.



*simple graph* — *nonsimple graph with multiple edges* — *nonsimple graph with loops*

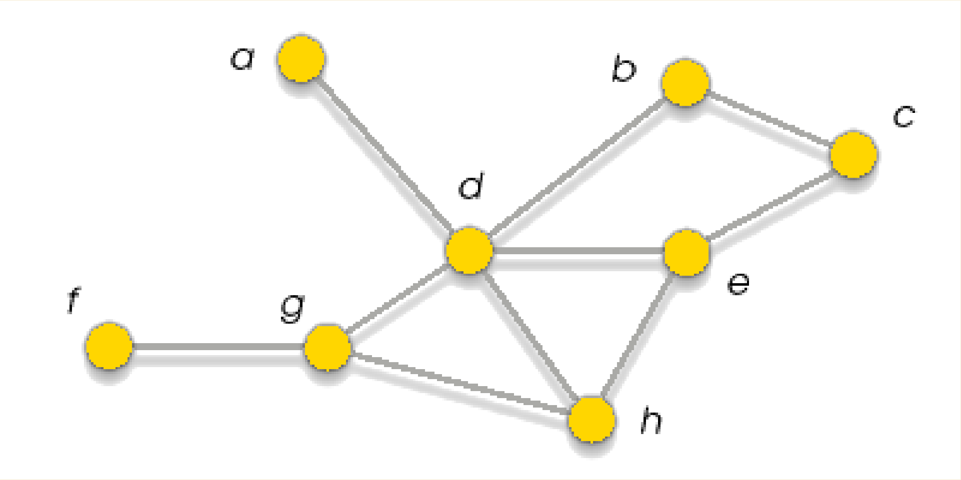
- Graphes orientés : graphe sans boucle, et chaque couple de sommets (u,v) est relié par au plus un arc de u vers v , et au plus par un arc de v vers u.

# Graphes non orientés



**Définition**

- Soit G=(V,E) un graphe non orienté simple. Deux arêtes sont adjacentes si elles partagent une même extrémité

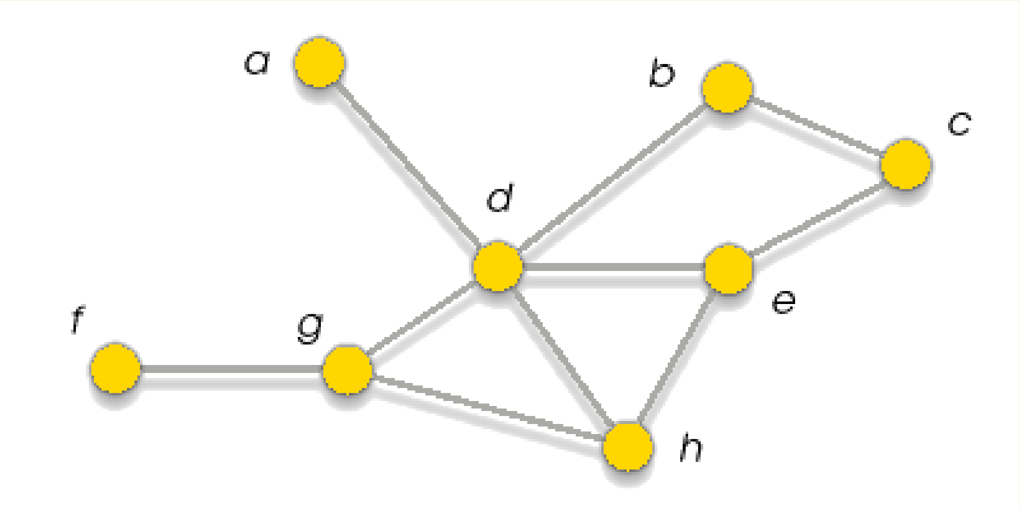



- e1=(a,d) et e2=(b,d) sont adjacentes
- e3=(f,g) et e4=(d,h) ne sont pas adjacentes

# Graphes non orientés

**Définition**

- L'ensemble des voisins d'un sommet u dans un graphe G=(V,E) est N(u)={v∈V: (u,v) ∈ E}

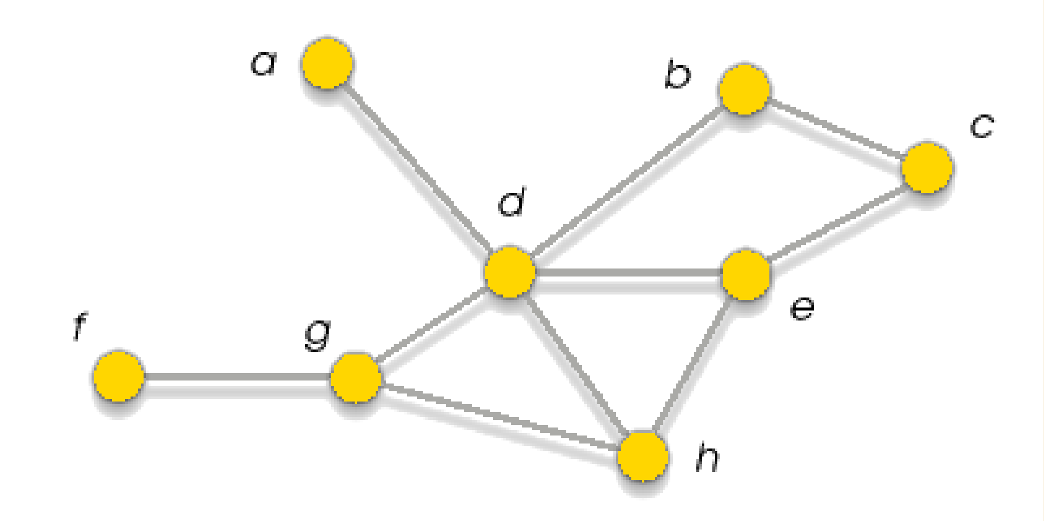



- N(a)={d}; N(g)={f,d,h}; N(d)={a,b,g,h,e} …

# Graphes non orientés

**Définition**

- Une arête est incidente à un sommet *u* si *u* est l'une de ses extrémités.

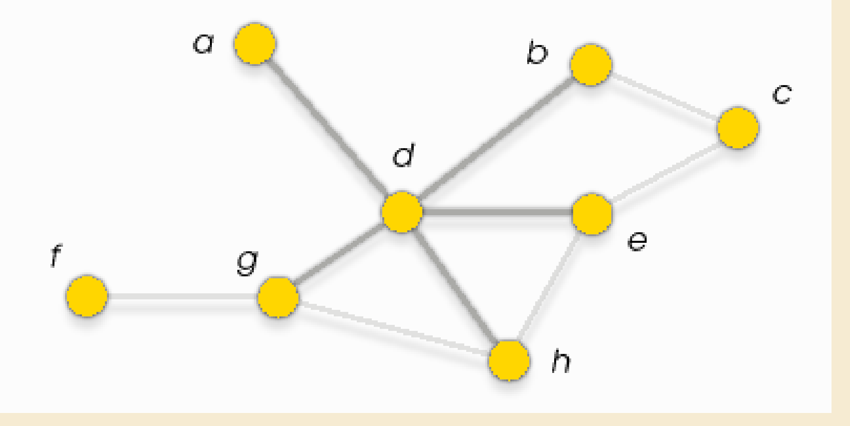



- L’arête e1=(h,g) est incidente au sommet h

# Graphes non orientés

**Définition**

- Le degré d'un sommet u dans un graphe G=(V, E) est d(u)=|N(u)|
- Le degré minimum de G est $\delta=\mathrm{Min}\{d(u) : u \in V\}$
- Le degré maximum de G est $\Delta=\mathrm{Max}\{d(u) : u \in V\}$



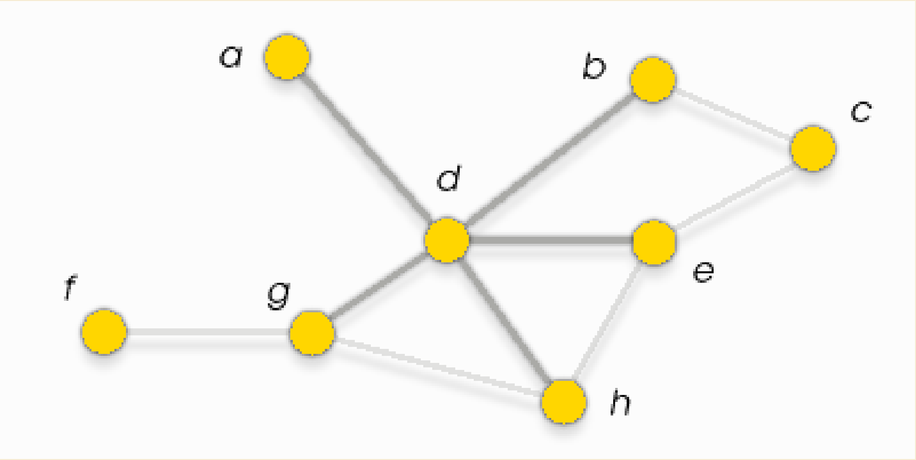

- d(d) = 5
- les arêtes incidentes à d
- sont (d,a),(d,b),(d,e),
- (d,h) et (d,g)

- $\delta=\mathrm{Min}\{d(u):u\in V\} = 1$ d(a)=1
- $\Delta=\mathrm{Max}\{d(u):u\in V\} = 5$ d(d) = 5

# Graphes non orientés

## Propriétés

- La somme des degrés des sommets d'un graphe est égal à 2 fois son nombre d'arêtes
- Le nombre de sommets de degré impair d'un graphe est pair



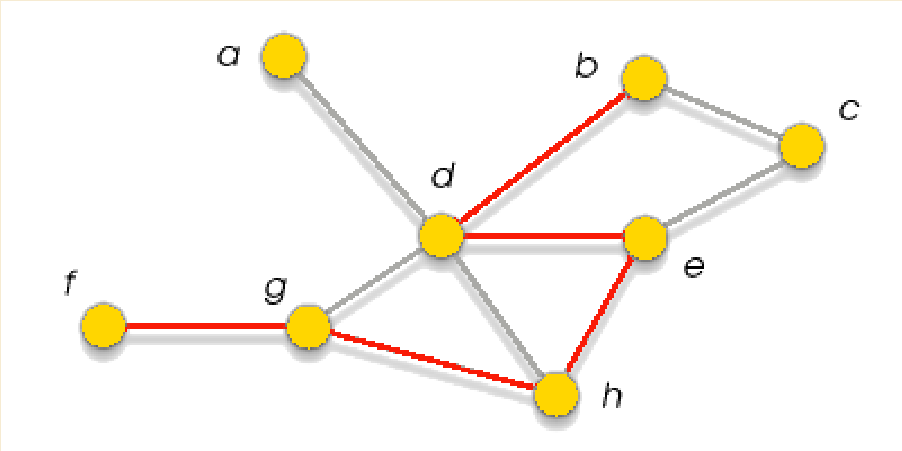

- Exercices :
  - Démontrer les propriétés précédentes

# Graphes non orientés



**Définitions**

- Soient u et v deux sommets distincts d'un graphe G=(V,E)
  - Une chaîne de u à v dans G est une suite $u_0=u,u_1,\ldots,u_k=v$ de sommets 2 à 2 distincts tq $\forall i\in\{1,\ldots,k\}$ $(u_{i-1}, u_i)\in E$
  - u est l'origine de la chaîne / v est l'extrémité de la chaîne
  - La longueur d'une chaîne est le nombre d'arêtes qu'elle possède




- p=( f, g, h, e, d, b )

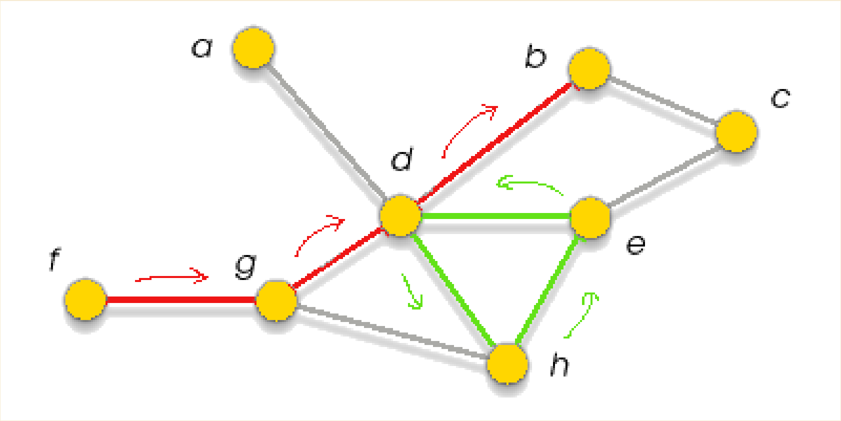
- p est une chaîne de longueur 5 reliant les sommets f à b

# Graphes non orientés



**Remarque**

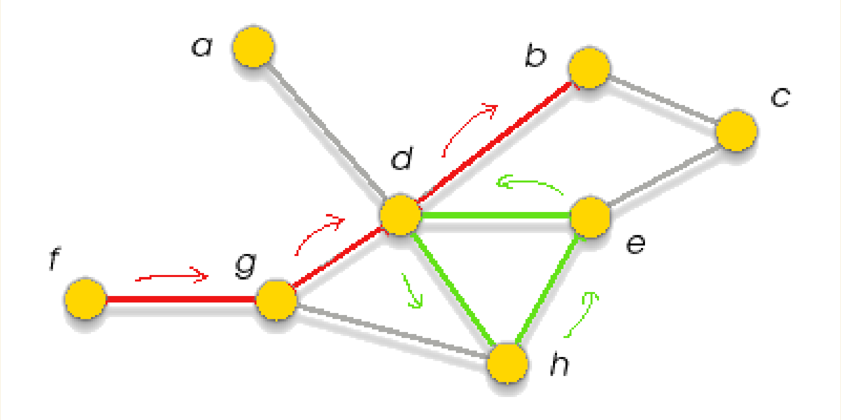
- Il existe d'autres chaînes pour aller de f à b
  - (f, g, d, b) de longueur 3,
  - (f, g, d, h, e, d, b) de longueur 6,
  - (f, g, d, h, e, d, h, e, d, b) de longueur 9,
  - ...



# Graphes non orientés

## Exemple

- Une chaîne est simple si chaque arête de la chaîne est empruntée une seule fois
- Un cycle est une chaîne dont l'origine et l'extrémité sont confondues




- Les chaînes (f, g, d, b)
- et (f, g, d, h, e, d, b)
- sont simples.

- La chaîne (f, g, d, h, e, d, h, e, d , b) n'est pas simple : le cycle (d, h, e, d ) est emprunté 2 fois. Ce cycle pouvant être emprunté autant de fois que l'on veut, il y a un nombre infini de chaînes de f à b